Střední škola diplomacie a veřejné správy s.r.o.
ul. A. Jiráska, č.p. 1887 434 01 Most (CZ)
IČ: 250 45 911 IZO: 181007282
Tel.: +420 411 130 916, 918 **fax:** +420 411 130 917 **e-mail:** info@ssdvs.cz **web:** www.ssdvs.cz

Operační program
Vzdělávání pro konkurenceschopnost
III/2 ICT INOVACE

Matematika
1. ročník

Kvadratická funkce a rovnice

Datum vytvoření: listopad 2012
Třída: 1. A, 2. C
Autor: PaedDr. Jan Wild

Klíčová slova:
- ✓ kvadratická funkce
- ✓ kvadratická rovnice
- ✓ kvadratický trojčlen

Anotace

Sada obsahuje dvacet DUMů tematicky zaměřených na využití počítačových aplikací k výuce a studiu kvadratických funkcí a rovnic. Tím je zaměřena zejména na kompetence k řešení problémů, kompetence k práci s prostředky informačních a komunikačních technologií a kompetence k matematickým aplikacím.

Cíle této sady lze shrnout zejména na následující oblasti: žák zná počítačové aplikace pro řešení matematických úloh a umí tyto aplikace s návodem využít pro řešení matematických úloh, které umí řešit klasickým způsobem.

Střední škola diplomacie a veřejné správy s.r.o.
ul. A. Jiráska, č.p. 1887 434 01 Most (CZ)
IČ: 250 45 911 IZO: 181007282
Tel.: +420 411 130 916, 918 **fax:** +420 411 130 917 **e-mail:** info@ssdvs.cz **web:** www.ssdvs.cz

Obsah

Střední škola diplomacie a veřejné správy s.r.o.
ul. A. Jiráska, č.p. 1887 434 01 Most (CZ)
IČ: 250 45 911 IZO: 181007282
Tel.: +420 411 130 916, 918 **fax:** +420 411 130 917 **e-mail:** info@ssdvs.cz **web:** www.ssdvs.cz

1 Kvadratická funkce

Pochopení pojmů předpis kvadratická funkce, koeficienty kvadratické funkce, nezávisle proměnná a závisle proměnná kvadratické funkce.

Předpis kvadratické funkce

Předpis kvadratické funkce je $f: y = ax^2 + bx + c; x \in \mathbb{R}$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ jsou koeficienty lineární funkce.

Předpis kvadratické funkce je tvořen kvadratickým trojčlenem $ax^2 + bx + c$; člen ax^2 se nazývá kvadratický, člen bx lineární a c je člen absolutní.

V souvislosti s předpisem kvadratické funkce je potřeba zvládnout dvě úlohy:
1) Určete koeficienty a, b, c v předpisu lineární funkce.
2) Napište předpis lineární funkce, jestliže jsou dány její koeficienty a, b, c.

Příklady na předpis lineární funkce

ad 1) V předpisu lineární funkce je $f: y = 2x^2 + 3x - 4$ jsou koeficienty $a = 2; b = 3; c = -4$.

ad 2) Předpis lineární funkce s koeficienty $a = 3; b = -2; c = 1$ je $f: y = 3x^2 - 2x + 1$.

Jaká je hodnota koeficientů a, b, c v předpisech $y = x^2 - x + 1$ a $y = -x^2 + 2$, když u proměnné x^2 (respektive x) „žádné číslo" není, nebo dokonce takový člen chybí?

Hodnoty kvadratické funkce

Je-li zadán předpis kvadratické funkce $f: y = ax^2 + bx + c$, můžeme ke každému zvolenému číslu x jednoznačně přiřadit (vypočítat) číslo y. Proměnnou x nazýváme nezávisle proměnná, protože její hodnoty volíme sami. Proměnnou y nazýváme závisle proměnnou, protože její hodnoty jsou výsledkem jednoznačného výpočtu po dosazení hodnot závisle proměnné x.

Příklad na hodnoty kvadratické funkce

V příkladu kvadratické funkce $f: y = 2x^2 + 3x - 4$ dostaneme pro zvolenou hodnotu $x = -1$ vypočítanou hodnotu $y = 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 4 = 2 - 3 - 4 = -5$.

Výsledek minulého příkladu můžeme matematicky zapsat různými způsoby:

$f: -1 \to -5$ - číslu -1 přiřadíme číslo -5,
$f(-1) = -5$ - funkční hodnota pro číslo -1 je -5,
$y(-1) = -5$ - $y - ová$ hodnota pro číslo -1 je -5 a
$[1; 5] \in f$ - uspořádaná dvojice čísel -1 a -5, nebo $[-1; -5]$, je prvkem funkce *f*.

Tabulka hodnot kvadratické funkce

Nejpřehlednější způsob zápisu hodnot každé funkce je tabulka, platí i pro kvadratickou funkci. Do prvního řádku zapisujeme „zvolená" čísla x a do druhého řádku „vypočítané" hodnoty y.

Doplňte tabulku funkčních hodnot kvadratické funkce $f: y = 2x^2 - 3x + 4$:

Tabulka:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	31	18	9	4	3	6	13

Hodnoty x v prvním řádku jsme zvolili, hodnoty y v druhém řádku jsme vypočítali. Například pro druhý sloupeček hodnot vypočítáme $y = 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 4 = 8 + 6 + 4 = 18$

Sešit aplikace Excel má název „*2.01-Tabulka kvadr fce-ME.xlsx*."

2 Cvičení na předpis a hodnoty kvadratické funkce

Praktické zvládnutí předpisu kvadratické funkce, procvičení výpočtu funkčních hodnot, zopakování počítání s celými čísly, zlomky a mocninami

Cvičení

2.1 Určete hodnoty koeficientů a, b, c v předpisech kvadratických funkcí:

a) $y = 3x^2 - 2x + 1$ $a =$_____ $b =$_____ $c =$_____

b) $y = x^2 - x - 4$ $a =$_____ $b =$_____ $c =$_____

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x$ $a =$_____ $b =$_____ $c =$_____

d) $y = 2{,}5x^2$ $a =$_____ $b =$_____ $c =$_____

e) $y = 5 - 6x + x^2$ $a =$_____ $b =$_____ $c =$_____

2.2 Napište předpisy kvadratických funkcí, jejichž koeficienty jsou dány:

a) $a = 2; b = -4; c = 3$ ____________________

b) $a = 1; b = -4; c = -2$ ____________________

c) $a = 2; b = -4; c = 0$ ____________________

d) $a = -1; b = 0; c = 3$ ____________________

2.3 Doplňte tabulku hodnot kvadratické funkce

a) $f: y = -x^2 - x - 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

b) $f: y = x^2 + x + 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

3 Graf ryze kvadratické funkce

Pochopení pojmu graf ryze kvadratické funkce a jeho konstrukce

Graf kvadratické funkce
Graf kvadratické funkce f je množina všech bodů soustavy souřadnic Oxy, které splňují rovnici $f: y = ax^2 + bx + c; x \in \mathbb{R}$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Ryze kvadratická funkce
Nejprve se zabývejme grafem kvadratické funkce $y = ax^2, a \neq 0$, ve které „chybí" lineární i absolutní člen.

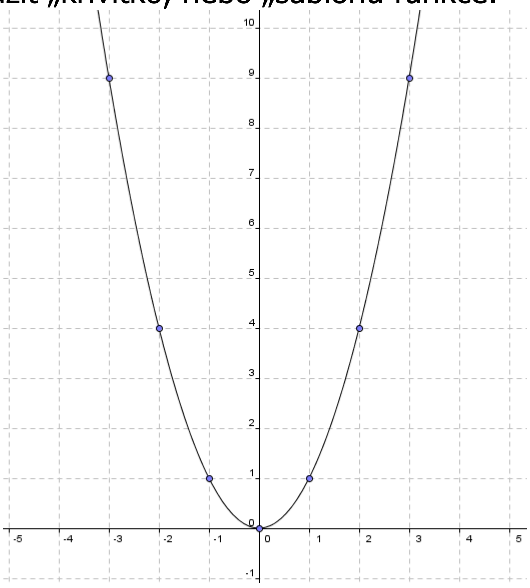
Pro sestrojení grafu je nejvýhodnější nejprve vytvořit tabulku jejích hodnot.

Sestrojte graf funkce $f: y = x^2$.

Tabulka:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Graf: Nejprve sestrojíme soustavu souřadnic, do ní zaneseme body z tabulky a pak jimi proložíme křivku. Můžeme použít „křivítko, nebo „šablonu funkce."



Grafem kvadratické funkce je **parabola**.

Jak ovlivňuje polohu a tvar paraboly koeficient *a*?

4 Vliv koeficientu *a* na graf ryze kvadratické funkce

Odvození vlivu koeficientu *a* na graf kvadratické funkce s použitím tabulkového procesoru

Obecný předpis ryze kvadratické funkce je $y = ax^2$ a chceme zjistit, jaká vliv má koeficient *a* na graf její funkce. Lze to udělat tak, že si narýsujeme graf několika funkcí, ve kterých budeme postupně měnit hodnoty koeficientů, zkusme to ale udělat pomocí počítačových aplikací.

Vliv koeficientu *a* budeme zkoumat pomocí sešitu Excel, ve kterém jsme pro tyto účely přidali ovládací prvky „Číselník," která nám umožňují měnit hodnoty koeficientu a sledovat, jak se mění graf.

Zkoumání vlivu koeficientu *a* na graf kvadratické funkce

Spusťte si sešit *„2.04-Graf Kvadr fce-ME.xlsx,"* a měňte postupně hodnoty koeficientu *a*.
Jak se změní graf?

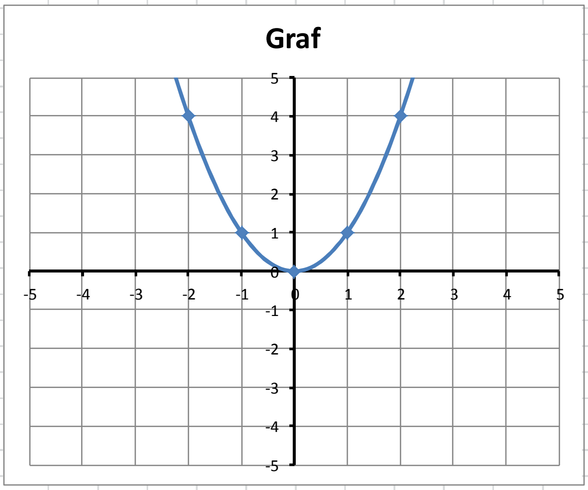
Kvadratická funkce

y=ax^2

a= 1

Tabulka:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25



Závěr

Koeficient *a* mění polohu paraboly;

pro $a > 0$ vytváří „jámu" (nebo říkáme, že do paraboly „prší")

pro $a < 0$ vytváří „kopec" (nebo říkáme, že do paraboly „neprší")

Pro zvětšující hodnotu $|a|$ se parabola „zužuje" a naopak, pro menší hodnoty $|a|$ je parabola „širší."

Grafy kvadratických funkcí $y = ax^2$ pro $a = 1; 2; \frac{1}{2}$ jsou součástí „Šablony funkce" a využívají se k sestrojení obecné kvadratické funkce.

Střední škola diplomacie a veřejné správy s.r.o.
ul. A. Jiráska, č.p. 1887 434 01 Most (CZ)
IČ: 250 45 911 IZO: 181007282
Tel.: +420 411 130 916, 918 **fax:** +420 411 130 917 **e-mail:** info@ssdvs.cz **web:** www.ssdvs.cz

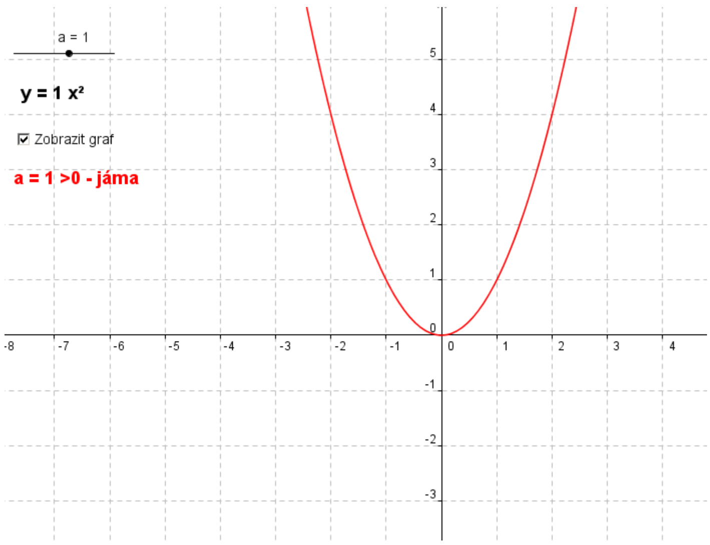
5 Vliv koeficientu *a* na graf kvadratické funkce v GeoGebře

Odvození vlivu koeficientu *a* na graf kvadratické funkce s použitím GeoGebry

Obecný předpis ryze kvadratické funkce je $y = ax^2$ a chceme zjistit, jaká vliv má koeficient *a* na graf její funkce. Lze to udělat tak, že si narýsujeme graf několika funkcí, ve kterých budeme postupně měnit hodnoty koeficientů, zkusme to ale udělat pomocí počítačových aplikací.

Vliv koeficientu *a* budeme zkoumat pomocí sešitu Excel, ve kterém jsme pro tyto účely přidali ovládací prvky „Číselník," která nám umožňují měnit hodnoty koeficientu a sledovat, jak se mění graf.

Zkoumání vlivu koeficientu *a* na graf kvadratické funkce
Spusťte si dokument *„2.5-Graf Kvadr fce-GG.ggb,"* a měňte postupně hodnoty koeficientu *a*.
Jak se změní graf? Tato aplikace je názornější, než stejná úloha v tabulkovém procesoru!



Závěr

Koeficient *a* mění polohu paraboly;

pro $a > 0$ vytváří „jámu" (nebo říkáme, že do paraboly „prší")

pro $a < 0$ vytváří „kopec" (nebo říkáme, že do paraboly „neprší")

Pro zvětšující hodnotu $|a|$ se parabola „zužuje" a naopak, pro menší hodnoty $|a|$ je parabola „širší."

Grafy kvadratických funkcí $y = ax^2$ pro $a = 1; 2; \frac{1}{2}$ jsou součástí „Šablony funkce" a využívají se k sestrojení obecné kvadratické funkce.

6 Převod obecného tvaru kvadratické funkce na vrcholový tvar

Pochopení převodu obecného předpisu kvadratické funkce na vrcholový tvar.

Převedení obecného tvaru kvadratické funkce na vrcholový tvar

Obecný předpis kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ lze převést na tvar $y = a(x - x_V)^2 + y_V$ (1), kde a je koeficient kvadratického členu obecného (původního) tvaru kvadratické funkce a $x_V = -\frac{b}{2a}$ (2); $y_V = c - \frac{b^2}{4a}$ (3) jsou souřadnice vrcholu $V = [x_V; y_V]$ paraboly- grafu kvadratické funkce.

Zkuste odvodit vrcholový tvar kvadratické funkce (a tím i dokázat její platnost).

Vrcholový tvar kvadratické funkce je vhodný pro sestrojení jejího grafu. Grafem je vlastně, nepřesně řečeno, parabola $y = ax^2$ „posunutá" do vrcholu $V = [x_V; y_V]$.

Převeďte obecnou rovnici kvadratické funkce $f: y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ na vrcholový tvar

Řešení:
Dosazením do vzorců (2) a (3) vypočítáme:
$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = -\frac{2}{1} = -2$; $y_V = c - \frac{b^2}{4a} = 1 - \frac{(-2)^2}{4 \cdot (-\frac{1}{2})} = 1 - \frac{4}{-2} = 1 + 2 = 3$, tedy $V = [-2; 3]$

a dosadíme do vztahu (1). Dostaneme $y = -\frac{1}{2}(x - (-2))^2 + 3$ a po estetické úpravě $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$.

Převod můžeme ověřit zkouškou:

$$y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$$

$$y = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 4) + 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - x - 2 + 3$$

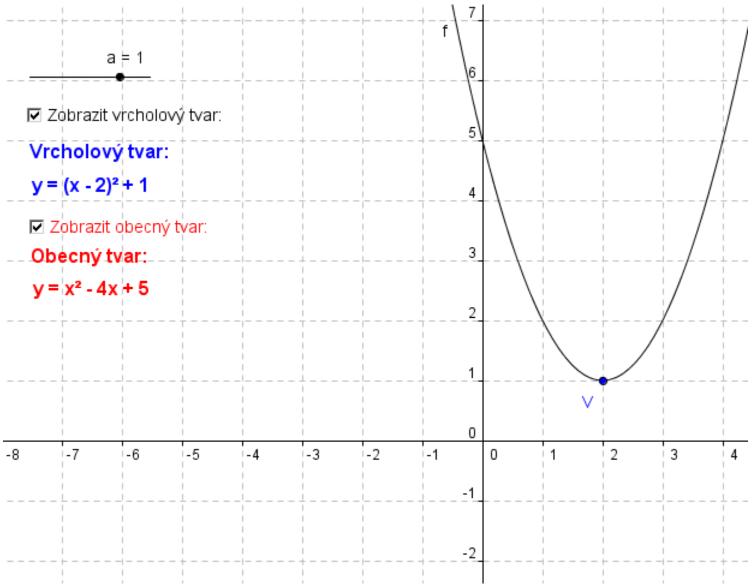
$$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1$$

Závěr: Vrcholový tvar kvadratické funkce je $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$, vrchol paraboly je v bodě $V = [-2; 3]$.

7 Obecný a vrcholový tvar rovnice kvadratické funkce dynamicky

Vytvoření názorné představy o vrcholovém a obecném tvaru rovnice kvadratické funkce v souvislosti s jejím grafem. Prozkoumání tvaru a pozice paraboly v dynamické aplikaci GeoGebry

V aplikaci GeoGebra otevřete dokument *„2.07-Vrch a Obec tvar Kvadr fce-GG.ggb.“*



Zrušte zaškrtnutí políček „Zobrazit vrcholový tvar“ a „Zobrazit obecný tvar.“ Nastavte hodnotu parametru *a* kvadratické funkce, přesouvejte parabolu za vrchol do požadovaného bodu a řešte následující úlohy:

1. Určete vrcholový tvar rovnice kvadratické funkce $y = a(x - x_V)^2 + y_V$

2. Určete obecný tvar rovnice kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$

Řešení: Správnost řešení zkontrolujete zaškrtnutím políček „Zobrazit vrcholový tvar“ a „Zobrazit obecný tvar.“

8 Graf kvadratické funkce v tabulkovém procesoru Microsoft Excel™

Zvládnutí sestrojení grafu kvadratické funkce s použitím nástroje tabulkového procesoru „Vložit graf."

V následujícím příkladu si ukážeme, jak sestrojit graf kvadratické funkce v aplikaci Microsoft Excel™

Sestrojte graf funkce $f: y = x^2 - 4x + 5$.

Tabulka a graf:
Nejprve vytvoříme tabulku tak, že v prvním řádku zvolíme hodnoty *x* vzestupně a do druhého řádku zadáme vzorec pro výpočet hodnot kvadratické funkce, pak tabulku „vybereme" a zvolíme „Vložení/Graf/XY bodový.

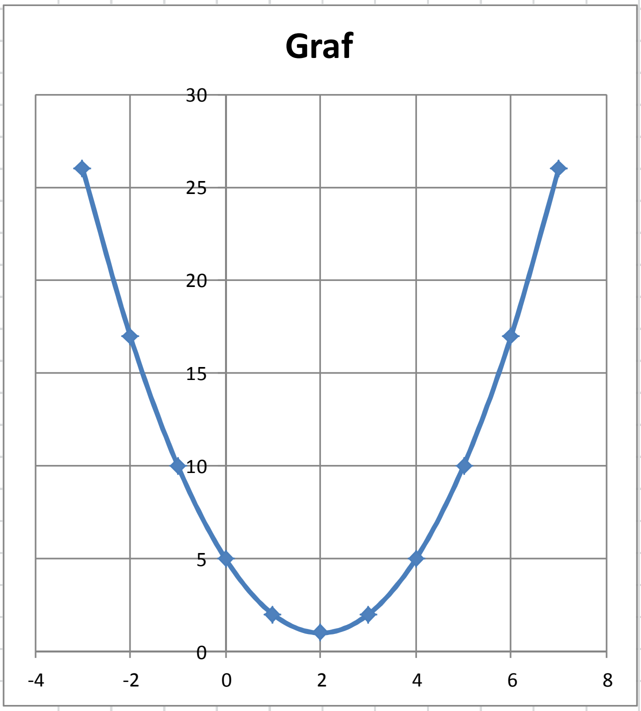
Kvadratická funkce

y=ax²+bx+c

a=	**1**
b=	**-4**
c=	**5**

Tabulka:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	26	17	10	5	2	1	2	5	10	17	26



Vzhled grafu si upravte podle vlastního vkusu.

Řešení naleznete v sešitě Microsoft Excel „2.8-Graf Kvadr fce.xlsx."

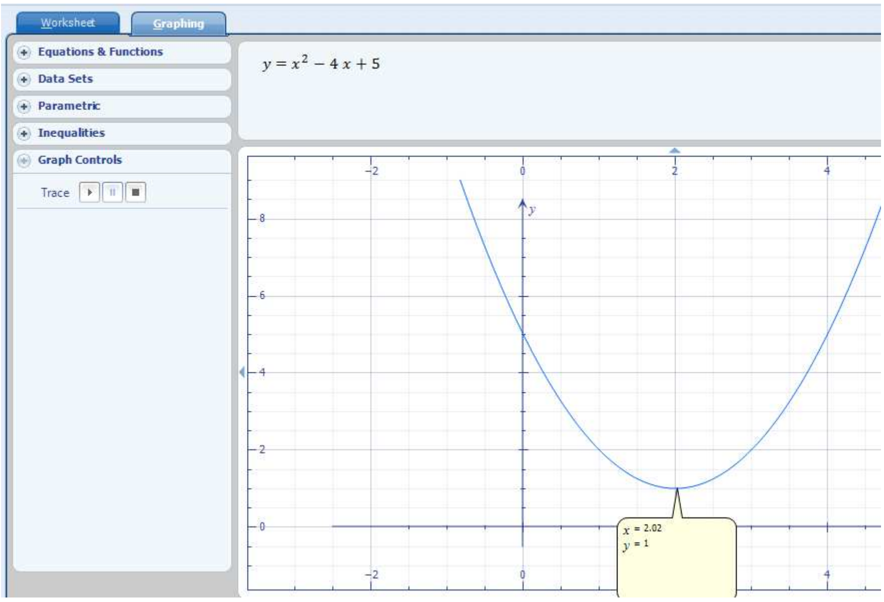
9 Graf kvadratické funkce v programu Microsoft Mathematics™

Ukázka možnosti sestrojení grafu kvadratické funkce s použitím nástroje Microsoft Mathematics

V následujícím příkladu si ukážeme, jak sestrojit graf kvadratické funkce v aplikaci Microsoft Matematics™

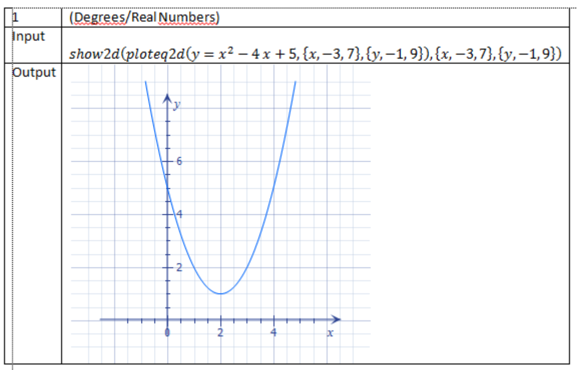
Sestrojte graf funkce $f : y = x^2 - 4x + 5$.

Graf:
V záložce „Graphing" zadáme předpis kvadratické funkce ve stejném tvaru a s použitím tlačítka „Graph" vygenerujeme graf požadované funkce. Graf je možné přizpůsobit vlastním potřebám a lze také například funkci trasovat- Graph Controls/Trace.



Graf lze exportovat do aplikace Microsoft Word.

Tento nástroj je výhodné použít v případě „složitějších" matematických úloh.



Řešení této úlohy naleznete v dokumentu *„2.09-Graf Kvadr fce-MM.gcw.*"

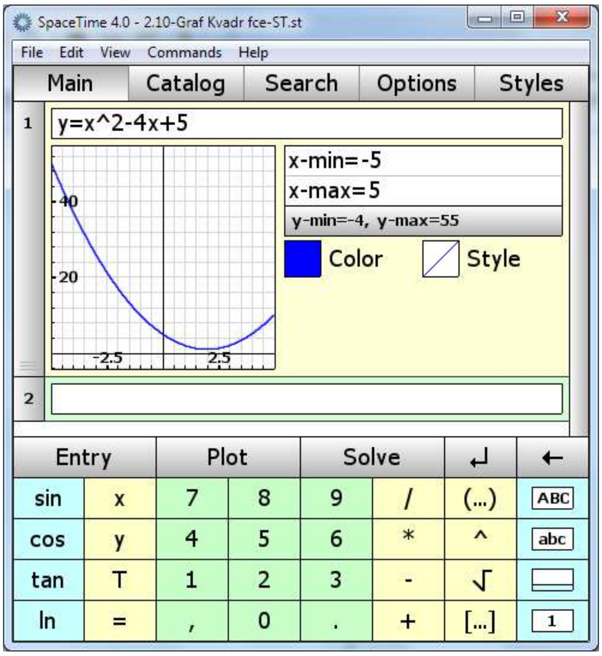
10 Graf kvadratické funkce v programu SpaceTime™

Zvládnutí sestrojení grafu kvadratické funkce s použitím nástroje SpaceTime

V následujícím příkladu si ukážeme, jak sestrojit graf lineární funkce v aplikaci SpaceTime

Sestrojte graf funkce $f: y = x^2 - 4x + 5$.

Graf:
Do vstupního řádku zadejte předpis lineární funkce ve tvaru $y = x \wedge 2 - 4x + 5$ a stiskněte tlačítko „Plot."



Graf lze poklepáním otevřít v novém okně a v němž lze využít i další funkce, například trasování. Tento nástroj je výhodné použít v případě „složitějších" matematických úloh.

Soubor s řešením této úlohy má název „*2.10-Graf Kvadr fce-ST.st*."

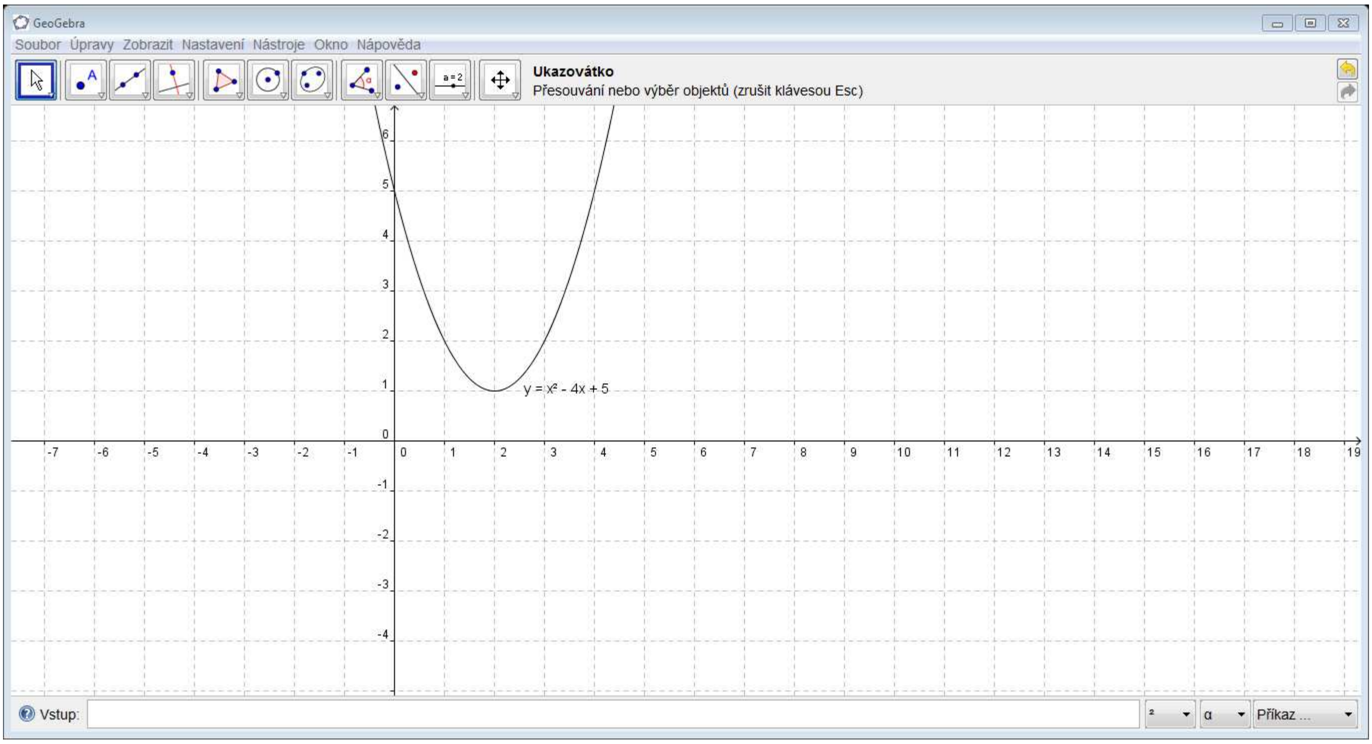
11 Graf kvadratické funkce v programu GeoGebra™

Zvládnutí sestrojení grafu kvadratické funkce s použitím nástroje GeoGebra

V následujícím příkladu si ukážeme, jak sestrojit graf lineární funkce v aplikaci GeoGebra

Sestrojte graf funkce $f: y = x^2 - 4x + 5$.

Graf:
Do vstupního řádku zadejte předpis lineární funkce ve tvaru $y = x \wedge 2 - 4x + 5$ a stiskněte tlačítko Enter.



Graf lze upravit podle potřeb uživatele.
Tento nástroj je výhodné použít v případě „složitějších" matematických úloh.

Dokument GeoGebry má název „*2.11-Graf Kvadr fce-GG.ggb*."

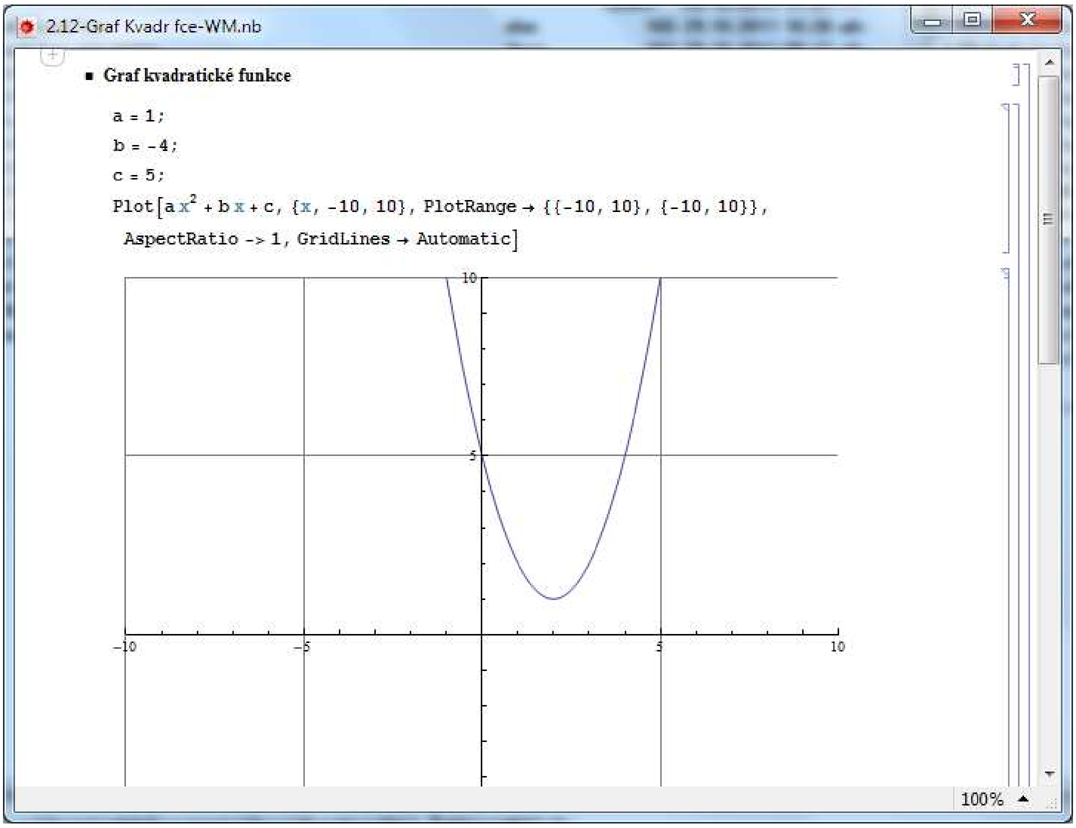
12 Graf kvadratické funkce v programu Wolfram Mathematica™

Ukázka sestrojení grafu kvadratické funkce s použitím nástroje Mathematica

V následujícím příkladu si ukážeme, jak sestrojit graf kvadratické funkce v aplikaci Mathematica

Sestrojte graf funkce $f: y = x^2 - 4x + 5$.

Graf:
Zadejte příkazy podle obrázku stiskněte kombinaci tlačítek Shift+Enter.



Graf lze upravit podle potřeb uživatele.
Tento nástroj je výhodné použít v případě „složitějších" matematických úloh.
Vzhledem k tomu, že aplikace je placená, je tato ukázka zařazena kvůli úplnosti matematického software.

Notebook aplikace Mathematica má název „*2.12-Graf Kvadr fce-WM.nb*."

13 Kvadratická rovnice

Pochopení pojmů kvadratická rovnice, diskriminant kvadratické rovnice, kořeny kvadratické rovnice, počet kořenů v závislosti na diskriminantu.

Kvadratická rovnice

Kvadratickou rovnicí o neznámé *x* nazveme každou rovnici, kterou můžeme pomocí ekvivalentních úprav převést na tvar $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0, b, c \in$ ˇ .

Úloha „řešte kvadratickou rovnici" znamená určit všechna čísla, která splňují rovnici a nazývají se kořeny kvadratické rovnice. Kvadratická rovnice může mít *dva*, *jeden*, nebo *žádný* kořen.

V kvadratické rovnici se nesmí vyskytovat žádná mocnina neznámé *x* vyšší než 2.

Výraz $ax^2 + bx + c$ je kvadratický trojčlen.

Levá strana úplné kvadratické rovnice má tři členy: $\underline{ax^2}$ je kvadratický člen, $\underline{bx}$ je lineární člen a $\underline{c}$ je absolutní člen, čísla $\underline{a, b, c}$ se nazývají koeficienty pořadě kvadratického, lineárního a absolutního členu.

Určení kořenů kvadratické rovnice

I. Neúplná kvadratická rovnice

1. Kvadratická rovnice bez absolutního členu ($c = 0$). Řešíme jí vytknutím x (násobku x).

Příklad: Řešte kvadratickou rovnici (bez absolutního členu):

$$2x^2 + 10x = 0 \text{ /vytkneme } 2x$$

$$2x(x+5) = 0$$

Na levé straně je součin, který se má rovnat 0, tj. jeden z činitelů musí být 0. Musí být tedy buď $2x = 0$ a to nastane pro $x = 0$, nebo $x - 5 = 0$, což nastane pro $x = -5$. Kořeny jsou tedy $0; -5$.

2. Kvadratická rovnice bez lineárního členu ($b = 0$) se řeší vyjádřením x^2 a odmocněním.

Příklad: Řešte kvadratickou rovnici (bez lineárního členu):

$$2x^2 - 8 = 0 \text{ /vyjádříme } x^2$$

$$2x^2 = 8 / : 2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x_{1,2} = \pm 2$$

Tato rovnice má kořeny $+2; -2$.

II. Úplná kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ **(** $a, b, c \neq 0$ **).**

Označíme-li **diskriminant** kvadratické rovnice $\mathrm{D} = \mathrm{b}^2 - 4ac$, potom platí:

Jestliže $D > 0$, pak má rovnice dva kořeny $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Je-li $D = 0$, pak má rovnice jeden kořen $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ a jedná se o tzv. dvojnásobný kořen.

pro $D < 0$, pak rovnice nemá řešení.

Příklad: Řešte rovnici $x^2 - x - 2 = 0$.

Určíme $a = 1, b = -1, c = -2$, určíme $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$ a dosadíme do vzorce $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$.

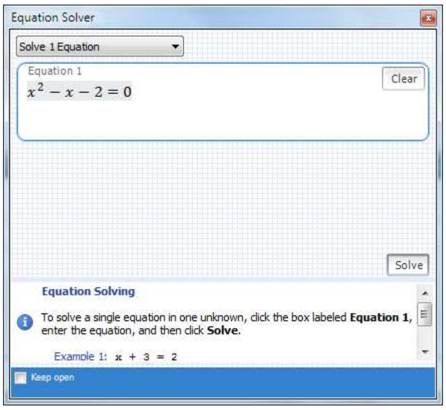
Kořeny jsou $x_1 = 2$ a $x_2 = -1$.

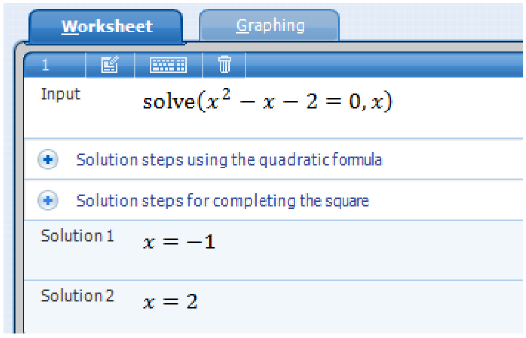
14 Řešení kvadratické rovnice v aplikaci Microsoft Mathematics

Pochopení počítačového řešení kvadratické rovnice v aplikaci Microsoft Mathematics

Řešte kvadratickou rovnici $x^2 - x - 2 = 0$ v aplikaci Microsoft Mathematics:

V aplikaci Microsoft Mathematics zvolíme „Equation Solver“, zadáme rovnici a klepneme na tlačítko „Solve.“ Dostaneme „Vstup (Input)“ ve formátu Mathematics a „Řešení (Solution).“





Export do aplikace Microsoft Word je následující:

1	(Degrees/Real Numbers)
Input	solve($x^2 - x - 2 = 0, x$)
Solution 1	$x = -1$
Solution 2	$x = 2$

Závěr: Rovnice má dvě řešení $x_1 = -1; x_2 = 2$.

Zkuste sami experimentovat s různými rovnicemi.

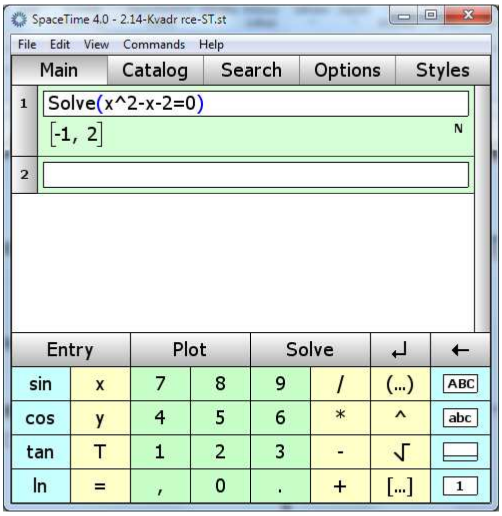
Dokument Microsoft Mathematics má název „*2.14-Kvadr rce-MM.gcw.*“

15 Řešení kvadratické rovnice v aplikaci SpaceTime

Pochopení počítačového řešení kvadratické rovnice v aplikaci SpaceTime.

Řešte kvadratickou rovnici $x^2 - x - 2 = 0$ v aplikaci SpaceTime:

V aplikaci SpaceTime zadáme příkaz k řešení rovnice ve tvaru „Solve(x^2-x-2=0)“ a klepneme na tlačítko „Solve.“ Dostaneme „Výstup: [-1,2].“



Závěr: Rovnice má dvě řešení $x_1 = -1; x_2 = 2$.

Zkuste sami experimentovat s různými rovnicemi.

Dokument SpaceTime má název „*2.15-Kvadr rce-ST.st*.“

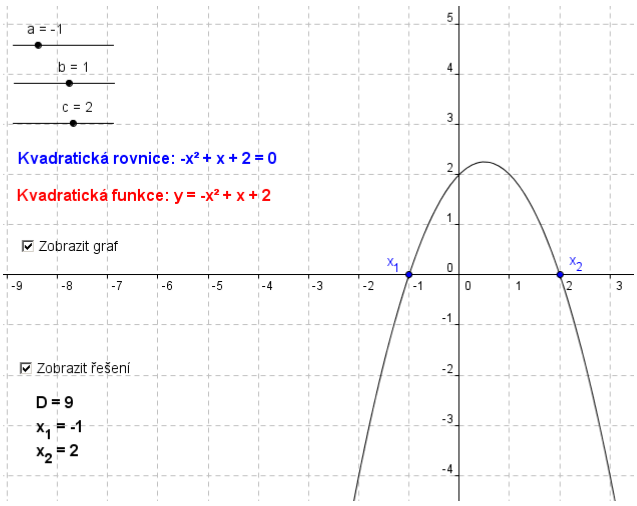
16 Souvislost kvadratické rovnice a kvadratické funkce

Pochopení souvislosti kvadratické rovnice a kvadratické funkce, využití kořenů kvadratické rovnice k načrtnutí grafu kvadratické funkce.

Kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c=0$ lze chápat, jako předpisy dvou funkcí $y=ax^2+bx+c$ a $y=0$. Grafem funkce $y=ax^2+bx+c$ je parabola a grafem funkce $y=0$ je osa *x*. Kořeny kvadratické rovnice jsou tedy průsečíky paraboly s osou *x*.

Kořeny kvadratické funkce lze tedy využít k poměrně přesnému načrtnutí kvadratické funkce.

Otevřete si dokument GeoGebry „*2.16-Kvadr rce a fce.ggb*“ a změnou hodnot parametrů a, b, c zkuste řešit různé kvadratické rovnice a zároveň sledujte, jak se změna koeficientů projeví na tvaru a poloze grafu kvadratické funkce.



17 Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

Pochopení vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice, znalost využití vztahů pro „rychlé" řešení kvadratické rovnice.

Má-li kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ (1) kořeny $x_1; x_2$, potom platí

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{array}}$$

Každou kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ lze převést a tvar (1) jejím vydělením koeficientem $a \neq 0$

Vztahy (2) a (3) jsou známy jako Vietovy vzorce.
Vietových vzorců lze využít k řešení kvadratické rovnice „zpaměti."

Pomocí Vietových vztahů řešte rovnici $x^2 + x - 6 = 0$.

Řešení: V této rovnici je $p = 1$ a $q = -6$, pro hledané kořeny $x_1; x_2$ musí tedy platit

$$x_1 + x_2 = -1$$
$$x_1 \cdot x_2 = -6$$

Postupujeme tak, že určuji rozklady čísla -6 ne součin dvou celých čísel a zároveň určuji jejich součet

součin -6		součet
1	-6	-6
-1	6	6
2	-3	-1
-2	3	1

Řešením jsou čísla $x_1 = 2; x_2 = -3$. Přesvědčte se o tom zkouškou.

Řešte zpaměti kvadratické rovnice a proveďte zkoušku:

1) $x^2 - x - 6 = 0$
$x_1 =$
$x_2 =$

2) $x^2 - 5x + 6 = 0$
$x_1 =$
$x_2 =$

3) $x^2 + 7x + 6 = 0$

4) $x^2 + 7x + 10 = 0$
$x_1 =$
$x_2 =$

5) $x^2 - 3x - 10 = 0$
$x_1 =$
$x_2 =$

6) $x^2 + x - 6 = 0$

$x_1 =$

$x_2 =$

$x_1 =$

$x_2 =$

18 Rozklad kvadratických trojčlenů na součin kořenových činitelů

Pochopení a osvojení rozkladu kvadratických trojčlenů na součin kořenových činitelů.

Má-li kvadratická rovnice $ax^2+bx+c=0$ kořeny $x_1;x_2$, potom platí

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Připomeňme vytýkání a rozklad podle vzorců jako jiné způsoby rozkladu mnohočlenu na součin. Součin je potřebný například při úpravách zlomků či při řešení nerovnic.

Upravte daný výraz a uveďte, kdy má smysl $\dfrac{4x^2+10x-6}{2x^2+7x+3}$.

Řešení: Rozložíme kvadratické trojčleny v čitateli na jmenovateli a zkrátíme.

Vypočteme kořeny rovnice $4x^2+10x-6=0$: $x_{1,2}=\dfrac{-10\pm\sqrt{100+96}}{8}=\dfrac{-10\pm\sqrt{196}}{8}=\dfrac{-10\pm 14}{8}=\left\{\begin{array}{l}-3\\ \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Vypočteme kořeny rovnice $2x^2+7x+3=0$: $x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\dfrac{-7\pm\sqrt{25}}{4}=\dfrac{-7\pm 5}{4}=\left\{\begin{array}{l}-3\\ -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Tedy můžeme kvadratické trojčleny ve zlomku přepsat jako

$$4x^2+10x-6=4(x+3)(x-\frac{1}{2})$$

$$2x^2+7x+3=2(x+3)(x+\frac{1}{2})$$

a tyto výrazy pak dosadit do zlomku, kde pak můžeme krátit.

$$\frac{4x^2+10x-6}{2x^2+7x+3}=\frac{4(x+3)(x-\frac{1}{2})}{2(x+3)(x+\frac{1}{2})}=\frac{2(x-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}}$$

Na závěr určíme podmínky platnosti výrazu v zadání příkladu. Celý zlomek je definován jen pro ta *x*, pro která není jmenovatel zlomku nulový. Neboli není definován pro kořeny rovnice $2x^2+7x+3=0$. Ty už jsme ale vypočetli, a tak jednoduše můžeme napsat podmínky platnosti $\left[x\neq -3; x\neq -\frac{1}{2}\right]$.

Rozložte zpaměti kvadratické trojčleny (s využitím Vietových vztahů):

1) x^2-x-6
2) x^2-5x+6
3) x^2+7x+6
4) $x^2+7x+10$
5) $x^2-3x-10$
6) x^2+x-6

Střední škola diplomacie a veřejné správy s.r.o.
ul. A. Jiráska, č.p. 1887 434 01 Most (CZ)
IČ: 250 45 911 IZO: 181007282
Tel.: +420 411 130 916, 918 **fax:** +420 411 130 917 **e-mail:** info@ssdvs.cz **web:** www.ssdvs.cz

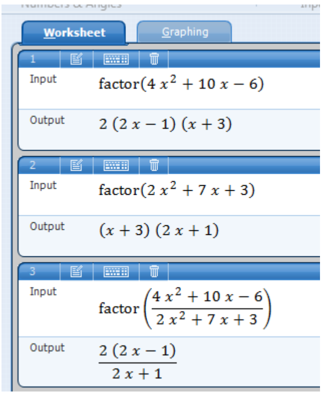
19 Rozklad kvadratických trojčlenů v aplikaci Microsoft Mathematics

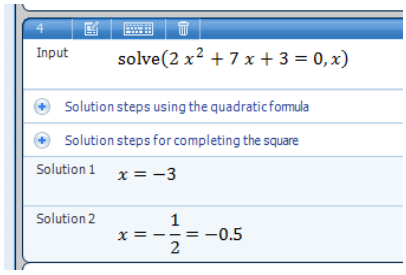
Pochopení a osvojení rozkladu kvadratických trojčlenů na součin kořenových činitelů v aplikaci Microsoft Mathematics.

Upravte daný výraz v aplikaci Microsoft Mathematics $\frac{4x^2+10x-6}{2x^2+7x+3}$.

Řešení: Rozložíme kvadratické trojčleny v čitateli na jmenovateli jednotlivě zadáním příkazů $factor\left(4x^2+10x-6\right)$ a $factor\left(2x^2+7x+3\right)$. Celý výraz můžeme řešit „najednou" zadáním příkazu $simplify\left(\frac{4x^2+10x-6}{2x^2+7x+3}\right)$. Podmínky určíme řešením rovnice $solve\left(2x^2+7x+3=0,x\right)$.

Řešení v aplikaci Mathematics bude potom následující:





Dokážete vysvětlit zdánlivý rozdíl výsledků $\frac{2(x-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}}$ a $\frac{4x-2}{2x+1}$?

Rozložte v aplikaci Microsoft Mathematics kvadratické trojčleny:

1) x^2-x-6
2) x^2-5x+6
3) x^2+7x+6
4) $x^2+7x+10$
5) $x^2-3x-10$
6) x^2+x-6

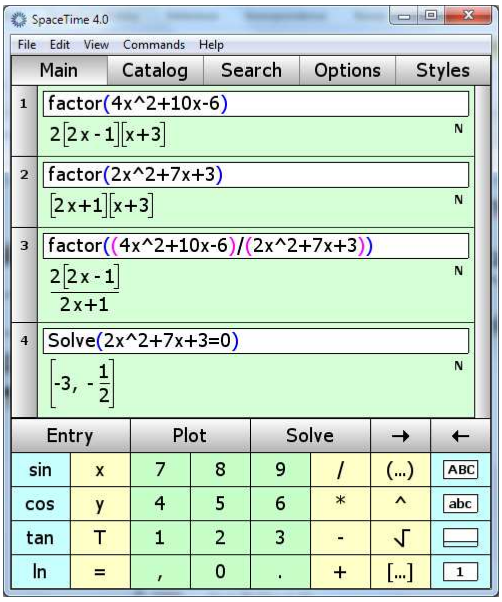
Soubor s dokumentem Microsoft Mathematics má název *„2.19-Rozklad Kvadr trojclenu-MM.gcw."*

20 Rozklad kvadratických trojčlenů v aplikaci SpaceTime

Pochopení a osvojení rozkladu kvadratických trojčlenů na součin kořenových činitelů v aplikaci SpaceTime.

Upravte daný výraz v aplikaci SpaceTime $\dfrac{4x^2+10x-6}{2x^2+7x+3}$.

Řešení: Rozložíme kvadratické trojčleny v čitateli na jmenovateli jednotlivě zadáním příkazů „factor(4x^2+10x-6)" a „factor(2x^2+7x+3)." Celý výraz můžeme řešit „najednou" zadáním příkazu „factor((4x^2+10x-6)/(2x^2+7x+3))." Podmínky určíme řešením rovnice „Solve(2x^2+7x+3=0)." Řešení v aplikaci bude potom následující:



Porovnejte komfort počítačového řešení v Matematics a SpaceTime.

Rozložte v aplikaci SpaceTime kvadratické trojčleny:

1) x^2-x-6
2) x^2-5x+6
3) x^2+7x+6
4) $x^2+7x+10$
5) $x^2-3x-10$
6) x^2+x-6

Soubor s dokumentem SpaceTime má název *„2.20-Rozklad Kvadr 3clenu-ST.st."*